

ক্যাটাগরিঃ সেকেন্ডারি

সময়ঃ ৪ ঘণ্টা

প্রতি সমস্যার মান ১০। সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পেছন অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

১.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  একটি ফাংশন যেন সকল বাস্তব সংখ্যা  $x$  এর জন্য  $f(x) = -f(-x) = f(x+1)$  হয়।  $f(2013)$  এর মান কত?

If  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a function such that  $f(x) = -f(-x) = f(x+1)$  for all real  $x$ , then what is the value of  $f(2013)$ ?

২. একটি বহুভুজকে অপ্রকৃত বহুভুজ বলা হবে যদি এর কোন একটি শীর্ষ এর আগের এবং পরের শীর্ষদুটির সংযোজক রেখাংশের উপর অবস্থান করে।  $ABCDE$  পঞ্চভুজে  $AB = AE$ ,  $BC = DE$ ।  $P$  এবং  $Q$  যথাক্রমে  $AE$  এবং  $AB$  এর মধ্যবিন্দু।  $PQ \parallel CD$ ,  $BD$  রেখাংশ  $AB$  এবং  $DE$  উভয়ের উপরই লম্ব। প্রমাণ কর যে  $ABCDE$  একটি অপ্রকৃত পঞ্চভুজ।

A polygon is called degenerate if one of its vertices falls on a line that joins its neighboring two vertices. In a pentagon  $ABCDE$ ,  $AB = AE$ ,  $BC = DE$ .  $P$  and  $Q$  are midpoints of  $AE$  and  $AB$ .  $PQ \parallel CD$ ,  $BD$  is perpendicular on both  $AB$  and  $DE$ . Prove that  $ABCDE$  is a degenerate pentagon.

৩.  $ABCDEF$  be a regular hexagon with  $AB = 7$ .  $M$  is the midpoint of  $DE$ .  $AC$  and  $BF$  intersect at  $P$ ,  $AC$  and  $BM$  intersect at  $Q$ ,  $AM$  and  $BF$  intersect at  $R$ . Find the value of  $[APB] + [BQC] + [ARF] - [PQMR]$ . Here  $[X]$  denotes the area of polygon  $X$ .

$ABCDE$  একটি সুস্থম ষড়ভুজ,  $AB = 7$ ।  $M$ ,  $DE$  এর মধ্যবিন্দু।  $AC$  ও  $BF$  পরস্পরকে  $P$  বিন্দুতে,  $AC$  ও  $BM$  পরস্পরকে  $Q$  বিন্দুতে এবং  $AM$  ও  $BF$  পরস্পরকে  $R$  বিন্দুতে ছেদ করে।  $[APB] + [BQC] + [ARF] - [PQMR]$  এর মান নির্ণয় কর, যেখানে  $[X]$  দ্বারা  $X$  ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্দেশ করা হয়।

৪.  $ABCD$  is a quadrilateral where  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ .  $E$  and  $F$  are two points on  $BD$  such that  $AE$  is perpendicular to  $BD$  and  $CF \parallel AE$ . Prove that,  $DE = BF$ .

$ABCD$  চতুর্ভুজে  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ।  $BD$  এর উপর  $E$  এবং  $F$  এমন দুটি বিন্দু যেন  $AE \perp BD$  এবং  $CF \parallel AE$  হয়। প্রমাণ কর যে,  $DE = BF$ .

৫.  $ABCD$  ট্রাপিজিয়াম আকৃতির একটি ধান ক্ষেত, যার সব জায়গায় সুস্থমভাবে ধান ফলেছে। কৃষকরা ধান কেটে ক্ষেতের ধারে ( $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ ) নিয়ে রাখে, তবে সেক্ষেত্রে ওই ধারটি ক্ষেতের ধান কাটার স্থান হতে সবচেয়ে নিকটবর্তী। এই শর্ত অনুযায়ী  $CD$  ধারে সম্পূর্ণ ধানের কত অংশ জমা হবে? যেখানে  $\angle DAB = \angle ABC = 120^\circ$ ,  $\angle BCD = \angle CDA = 60^\circ$ ,  $AB = BC = 50$  একক।

$ABCD$  is a paddy field of trapezoidal shape. Growth of paddy has been uniform everywhere in the field. Farmers are cutting the paddy and piling it in the nearest edge ( $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  or  $DA$ ). What is the portion of the total paddy that is piled up in the side  $CD$ ? It is given that,  $\angle DAB = \angle ABC = 120^\circ$ ,  $\angle BCD = \angle CDA = 60^\circ$ ,  $AB = BC = 50$  units.

ক্যাটাগরিঃ সেকেন্ডারি

সময়ঃ ৪ ঘণ্টা

৬. There are some boys and girls in a class. Every boy knows exactly  $r$  girls, and every girl knows exactly  $r$  boys. Show that there are an equal number of boys and girls in the class. (Assume that knowing is mutual, i.e. if A knows B then B knows A.)

একটি ক্লাসে বেশ কিছু ছেলেমেয়ে রয়েছে। প্রতিটি ছেলে ঠিক  $r$  সংখ্যক মেয়েকে চেনে, আবার প্রতিটি মেয়ে ঠিক  $r$  সংখ্যক ছেলেকে চেনে। ধরে নাও, এই চেনার ব্যাপারটি পারস্পরিক, অর্থাৎ A যদি B কে চেনে তাহলে B ও A কে চিনবে। দেখাও যে, ঐ ক্লাসে ছেলে ও মেয়ের সংখ্যা সমান।

৭. ABCD is a quadrilateral.  $AB \parallel CD$ . P is a point on AB and Q is a point on CD. A line parallel to AB intersects AD, BC, CP, AQ, BQ at points M, N, X, Y, R, S respectively. Prove that  $MX + NY = RS$ .

ABCD চতুর্ভুজে  $AB \parallel CD$ । AB এর উপর P এবং CD এর উপর Q একটি বিন্দু। AB এর সমান্তরাল একটি রেখা AD, BC, CP, AQ, BQ কে যথাক্রমে M, N, X, Y, R, S বিন্দুগুলোতে ছেদ করে। দেখাও যে  $MX + NY = RS$

৮. There are  $n$  cities in a country. Between any two cities there is at most one road. Suppose that the total number of roads is  $n$ . Prove that there is a city such that starting from there it is possible to come back to it without ever travelling the same road twice

একটি শহরে  $n$  সংখ্যক শহর আছে। যেকোন দুটি শহর সর্বোচ্চ একটি রাস্তা দিয়ে সংযুক্ত। শহরে মোট রাস্তার সংখ্যা  $n$ । প্রমাণ কর যে ঐ শহরে এমন অন্তত একটি শহর আছে যেখান থেকে চলতে শুরু করে একই রাস্তা দুবার ব্যবহার না করে ঐ শহরে ফিরে আসা সম্ভব।

৯. If there exists a prime number  $p$  such that  $p + 2q$  is prime for all positive integer  $q$  smaller than  $p$ , then  $p$  is called an "awesome prime". Find the largest "awesome prime" and prove that it is indeed the largest such prime?

যদি এমন কোন মৌলিক সংখ্যা  $p$  থাকে যার চেয়ে ছোট সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা  $q$  এর জন্য  $p + 2q$  সংখ্যাটিও মৌলিক হয় তবে  $p$  সংখ্যাটিকে 'চমৎকার মৌলিক সংখ্যা' বলা হয়। সবচেয়ে বড় চমৎকার মৌলিক সংখ্যাটি নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে এটিই সর্ববৃহৎ চমৎকার মৌলিক সংখ্যা।

১০. একটি বৃত্তের ওপর ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকের ক্রমে ছয়টি বিন্দু যথাক্রমে A, B, C, D, E ও F নেওয়া হল। AB, CD, EF ওই বৃত্তের তিনটি ব্যাস ভিন্ন জ্যা। AB ও DC কে বর্ধিত করলে Z বিন্দুতে, CD ও FE কে বর্ধিত করলে X বিন্দুতে এবং EF ও BA কে বর্ধিত করলে Y বিন্দুতে ছেদ করে। AC ও BF এর ছেদ বিন্দু P, CE ও BD এর ছেদ বিন্দু Q এবং AE ও DF এর ছেদ বিন্দু R। YQ ও ZR এর ছেদ বিন্দু O হলে XOP কোণের মান নির্ণয় কর।

Six points A, B, C, D, E, F are chosen on a circle anticlockwise. None of AB, CD, EF is a diameter. Extended AB and DC meet at Z, CD and FE at X, EF and BA at Y. AC and BF meets at P, CE and BD at Q and AE and DF at R. If O is the point of intersection of YQ and ZR, find the angle XOP.