ডাচ-বাংলা ব্যাংক | প্রথম আলো

গণিত উৎসব

11th

Bangladesh Mathematical Olympiad 2013

ডাচ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৩

জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড

আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

Math Olympiad Bangladesh

ক্যাটাগরিঃ হায়ার সেকেন্ডারি **সময়ঃ ৪ ঘণ্টা**

প্রতি সমস্যার মান ১০। সমস্যাগুলো কাঠিন্য অনুসারে সাজানোর চেষ্টা করা হয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত প্রতিটি সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। সমস্যার সমাধান মূল উত্তরপত্রে লিখতে হবে। রাফ করার জন্য মূল উত্তরপত্রের পেছন অংশ ব্যবহার করা যাবে। বাড়তি কাগজ নিলে সেখানে নাম ও রেজিস্ট্রেশন নম্বর লেখা বাঞ্ছনীয়।

১. একটি বহুভুজকে অপ্রকৃত বহুভুজ বলা হবে যদি এর কোন একটি শীর্ষ এর আগের এবং পরের শীর্ষদুটির সংযোজক রেখাংশের উপর অবস্থান করে। **ABCDE** পঞ্চভুজে **AB = AE**, **BC = DE**। **P** এবং **Q** যথাক্রমে **AE** এবং **AB** এর মধ্যবিন্দু। **PQ||CD**, **BD** রেখাংশ **AB** এবং **DE** উভয়ের উপরই লম্ব। প্রমাণ কর যে **ABCDE** একটি অপ্রকৃত পঞ্চভুজ।

A polygon is called degenerate if one of its vertices falls on a line that joins its neighboring two vertices. In a pentagon **ABCDE**, **AB = AE**, **BC = DE**. **P** and **Q** are midpoints of **AE** and **AB**. **PQ||CD**, **BD** is perpendicular on both **AB** and **DE**. Prove that **ABCDE** is a degenerate pentagon.

২. বাস্তব সংখ্যার সকল ক্রমজোড়ের সেট থেকে বাস্তব সংখ্যার সেটে সংজ্ঞায়িত একটি ফাংশন g, সকল বাস্তব সংখ্যা x এবং y এর জন্য $g(x,y)=-g(y,x)$। এমন একটি বাস্তব সংখ্যা r নির্ণয় কর যেন যেকোন বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য $g(x,x)=r$ হয়।

Let g be a function from the set of ordered pairs of real numbers to the same set such that $g(x,y)=-g(y,x)$ for all real numbers x and y. Find a real number r such that $g(x,x)=r$ for all real numbers x.

৩. **ABCDE** একটি সুষম ষড়ভুজ, **AB = 7**। **M, DE** এর মধ্যবিন্দু। **AC** ও **BF** পরস্পরকে P বিন্দুতে, AC ও BM পরস্পরকে **Q** বিন্দুতে এবং **AM** ও **BF** পরস্পরকে **R** বিন্দুতে ছেদ করে। **[APB] + [BQC] + [ARF] – [PQMR]** এর মান নির্ণয় কর, যেখানে **[X]** দ্বারা **X** ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্দেশ করা হয়।

ABCDEF be a regular hexagon with **AB = 7**. **M** is the midpoint of **DE**. **AC** and **BF** intersect at **P**, **AC** and **BM** intersect at **Q**, **AM** and **BF** intersect at **R**. Find the value of **[APB] + [BQC] + [ARF] – [PQMR].** Here **[X]** denotes the area of polygon X.

৪. $b<17$ হলে $\frac{31}{17}$ এর চেয়ে বড় সবচেয়ে ছোট ভগ্নাংশটি হলো $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{b}$ নির্ণয় কর।

If the fraction $\frac{a}{b}$ is greater than $\frac{31}{17}$ in the least amount while $b<17$, find $\frac{a}{b}$.

৫. $x>1$ এমন একটি পূর্ণসংখ্যা যেন যেকোন দুটি পূর্ণসংখ্যা a, b এর জন্য যদি ab সংখ্যাটি x দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহলে হয় a সংখ্যাটি x দ্বারা বিভাজ্য অথবা b সংখ্যাটি x দ্বারা বিভাজ্য। x এর কতগুলো উৎপাদক রয়েছে সেটা প্রমাণসহ বের কর।

Let $x>1$ be an integer such that for any two positive integers a and b, if x divides ab then x either divides a or divides b. Find with proof the number of positive integers that divide x.

৬. একটি শহরে n সংখ্যক শহর আছে। যেকোন দুটি শহর সর্বোচ্চ একটি রাস্তা দিয়ে সংযুক্ত। শহরে মোট রাস্তার সংখ্যা n। প্রমাণ কর যে ঐ শহরে এমন অন্তত একটি শহর আছে যেখান থেকে চলতে শুরু করে একই রাস্তা দুবার ব্যবহার না করে ঐ শহরে ফিরে আসা সম্ভব।

There are ***n*** cities in a country. Between any two cities there is at most one road. Suppose that the total number of roads is ***n***. Prove that there is a city such that starting from there it is possible to come back to it without ever travelling the same road twice

৭. যদি এমন কোন মৌলিক সংখ্যা p থাকে যার চেয়ে ছোট সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা q এর জন্য $p+2q$ সংখ্যাটিও মৌলিক হয় তবে p সংখ্যাটিকে ‘চমৎকার মৌলিক সংখ্যা’ বলা হয়। সবচেয়ে বড় চমৎকার মৌলিক সংখ্যাটি নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে এটিই সর্ববৃহৎ চমৎকার মৌলিক সংখ্যা।

If there exists a prime number p such that $p+2q$ is prime for all positive integer q smaller than p, then p is called an "awesome prime". Find the largest "awesome prime" and prove that it is indeed the largest such prime?

৮. **ABC** একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ এর **A, B, C** শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে **AD, BE, CF**। **E** বিন্দু দিয়ে **DF** এর সমান্তরাল রেখা **BC** কে **Y** এবং **BA** কে **X** বিন্দুতে ছেদ করে। **DF** এবং **CA** রেখার ছেদ বিন্দু হল **Z**। Δ**XYZ** এর পরিবৃত্ত **AC** কে **S** বিন্দুতে ছেদ করে। $\angle B=33^0$ হলে $\angle FSD$ এর মান প্রমাণ সহ বের কর।

ABC is an acute angled triangle. Perpendiculars drawn from its vertices on the opposite sides are **AD, BE** and **CF**. The line parallel to **DF** through **E** meets **BC** at **Y** and **BA** at **X. DF** and **CA** meet at **Z**. Circumcircle of **XYZ** meets **AC** at **S**. Given, $\angle B=33^0$ find the angle $\angle FSD$ with proof.

৯. একটি বৃত্তের ওপর ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকের ক্রমে ছয়টি বিন্দু যথাক্রমে **A, B, C, D, E** ও **F** নেওয়া হল। **AB, CD, EF** ওই বৃত্তের তিনটি ব্যাস ভিন্ন জ্যা। **AB** ও **DC** কে বর্ধিত করলে **Z** বিন্দুতে, **CD** ও **FE** কে বর্ধিত করলে **X** বিন্দুতে এবং **EF** ও **BA** কে বর্ধিত করলে **Y** বিন্দুতে ছেদ করে। **AC** ও **BF** এর ছেদ বিন্দু **P, CE** ও **BD** এর ছেদ বিন্দু **Q** এবং **AE** ও **DF** এর ছেদ বিন্দু **R**। **YQ** ও **ZR** এর ছেদ বিন্দু **O** হলে **XOP** কোণের মান নির্ণয় কর।

Six points **A, B, C, D, E, F** are chosen on a circle anticlockwise. None of **AB, CD, EF** is a diameter. Extended **AB** and **DC** meet at **Z**, **CD** and **FE** at **X**, **EF** and **BA** at **Y**. **AC** and **BF** meets at **P**, **CE** and **BD** at **Q** and **AE** and **DF** at **R**. If **O** is the point of intersection of **YQ** and **ZR**, find the angle **XOP**.

১০. X হলো n টি উপাদান বিশিষ্ট একটি সেট। $P_m(X)$ হলো X এর m উপাদানবিশিষ্ট সকল উপসেটের সেট। ধরা যাক $P_m(X)$ এর উপাদান সংখ্যা হলো k। দেখাও যে, $P_m(X)$ এর উপাদানগুলোকে এমনভাবে একটি অনুক্রম $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_k$ আকারে সাজানো যাবে যেখানে অনুক্রমটি দুটি শর্ত মেনে চলবে- (ক) $P_m(X)$ এর প্রতিটি উপাদান এই অনুক্রমে ঠিক একবার করে আসবে। (খ) $0<i<k$ এর জন্য $A_i \cap A_{i+1}$ সেটটির উপাদান সংখ্যা হবে $m-1$

X is a set of n elements. $P_m(X)$ is the set of all m element subsets (i.e. subsets that contain exactly m elements) of X. Suppose $P_m(X)$ has k elements. Prove that the elements of $P_m(X)$ can be ordered in a sequence $A_1, A_2, \ldots A_i, \ldots A_k$ such that it satisfies the two conditions: (A) each element of $P_m(X)$ occurs exactly once in the sequence, (B) for any i such that $0<i<k$, the size of the set $A_i \cap A_{i+1}$ is $m-1$.