

অনলাইন জীন তত্ত্ব ক্যাম্পঃ শেষ পরীক্ষা

মাসুম বিল্লাল

৩১ আগস্ট, ২০১৫.

1 সমস্যাসমূহ

সমস্যাগুলি কাঠিন্যের মান অনুযায়ী সাজানো নহে ☺ বিশেষ দ্রষ্টব্যঃ বাংলা ভুল হইলে ভুল ধরলে আদব কায়দার নাম্বার কাটা হবে।

1. ধর $\varphi(n)$ হচ্ছে n এর চেয়ে ছোট অথবা সমান কয়টি সংখ্যা n এর সাথে সহমৌলিক তার সংখ্যা। এমন সব ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n বের কর যাতে

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. এমন সব ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m, n বের কর যাতে $2^m - 1$ দিয়ে $n^2 + 1$ বিভাজ্য হয়।

3. দুইটা বিজোড় সংখ্যার যোগফল দুই দিয়ে বিভাজ্য কিন্তু চার দিয়ে নয়। প্রমাণ কর যে তাদের বিয়োগফল চার দিয়ে বিভাজ্য।

4. একটি সমতলীয় বহুভুজে ১৯৯৩ টি বিন্দু রয়েছে যার প্রতিটি বিন্দুর ভূজ এবং কোটি পূর্ণসংখ্যা। এর কোন বাহুর উপরেই দুই শীর্ষবিন্দু ছাড়া এমন কোন বিন্দু নেই যার ভূজ এবং কোটি পূর্ণসংখ্যা হয়। প্রমাণ কর যে, এই বহুভুজে এমন একটি বাহু আছে যার উপরে ক বিন্দুটি রয়েছে যেন ক বিন্দুর ভূজ এবং কোটি উভয়ের দ্বিগুণ করলে বিজোড় সংখ্যা পাওয়া যায়(সংখ্যা দুইটা একই হতে হবে এমনটি নয়)।

5. এমন সব ধনাত্মক মূলদ সংখ্যা (m, n, p) বের কর যাতে $m + \frac{1}{np}, n + \frac{1}{pm}, m + \frac{1}{mn}$ পূর্ণসংখ্যা হয়।

6. ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান করঃ $3^x - 5^y = z^2$.

7. এমন অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যার ধারা $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ আছে কি যাতে $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ হয় সব ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য?

8. $a = .235711\dots$ এখানে দশমিকের পরে সব মৌলিক সংখ্যা লেখা আছে। সংখ্যাটি কি মূলদ নাকি অমূলদ? একটি সংখ্যাকে মূলদ বলা হয় যদি ও কেবল যদি $\frac{m}{n}$ আকারে সংখ্যাটিকে প্রকাশ করা যায়, যেখানে হর ও লব উভয়ই পূর্ণসংখ্যা।
9. এমন ২০১৫ টি পূর্ণসংখ্যা কি আছে যাদের বর্গের সমষ্টি ও একটি বর্গ সংখ্যা?
10. নীচের সমীকরণটির কয়টি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যায় সমাধান আছে?

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2015}$$