



WvP-evsj v e'vsK - c0_g Avtj v MwYZ Drme 2010

জাতীয় গণিত উৎসব

AvtqvRK: evsj vt` k MwYZ Awj w'úqW KwguW



ক্যাটাগরি: হায়ার সেকেন্ডারি (১১শ-১২শ)
Category: Higher Secondary (xi - xii)

সময়: ৪ ঘণ্টা
Time: 4 hours

মূল উত্তরপত্রে সমস্যার সমাধান করতে হবে। সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। প্রতিটি প্রশ্নের মান সমান। প্রশ্নগুলো কাঠিন্যের ক্রমবর্ধমান ক্রমে সাজানো হয়েছে। সমস্যাগুলোর সমাধানে আংশিক নম্বর প্রদান প্রযোজ্য।

১. যদি $S = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2010^{2010}$ হয় তাহলে S কে 2 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা নির্ণয় কর।

Let $S = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2010^{2010}$. What is the remainder when S is divided by 2 ?

২. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের B কোণটি সমকোণ এবং $AB = 3$ । এর যেকোন একটি শীর্ষকে কেন্দ্র করে একটি একক ব্যাসার্ধের বৃত্ত আঁকা হল। ত্রিভুজের যে অংশ বৃত্তের অন্তর্ভুক্ত নয় তার সর্বোচ্চ ক্ষেত্রফল বের কর।

Isosceles triangle ABC is right angled at B and $AB = 3$. A circle of unit radius is drawn with its centre on any of the vertices of this triangle. Find the maximum value of the area of that part of the triangle that is not shared by the circle.

৩. একটি ধারাকে নিচের সংজ্ঞা অনুযায়ী গঠন করা হল:

$$A(1) = 1$$

$$A(n) = f(m) \text{ সংখ্যক } f(m) \text{ এবং তার পর } f(m) \text{ সংখ্যক } 0;$$

এখানে m হচ্ছে $A(n-1)$ এর অংক সংখ্যা।

$A(30)$ নির্ণয় কর। উল্লেখ্য m কে 9 দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে সেটিই $f(m)$ ।

A series is formed in the following manner:

$$A(1) = 1;$$

$$A(n) = f(m) \text{ numbers of } f(m) \text{ followed by } f(m) \text{ numbers of } 0;$$

m is the number of digits in $A(n-1)$

Find $A(30)$. Here $f(m)$ is the remainder when m is divided by 9 .

৪. একটি বৃত্ত Γ এর ভেতরে P একটি বিন্দু। এই বিন্দু দিয়ে দুটি জ্যা আঁকা হল যারা পরস্পরের উপর লম্ব। এই জ্যা দুটি বৃত্তকে ঘড়ির কাটার দিকে a ; b ; c ; d এই চারটি ভাগে ভাগ করে যার মধ্যে a অংশটি বৃত্তের কেন্দ্রকে ধারণ করে। দেখাও যে, $[a] + [c] \geq [b] + [d]$, এখানে $[x]$ দ্বারা x এর ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।

Given a point P inside a circle Γ , two perpendicular chords through P divide Γ into distinct regions a ; b ; c ; d clockwise such that a contains the centre of Γ .

Prove that $[a] + [c] \geq [b] + [d]$, where $[x] = \text{area of } x$.

৫. একটি 2010 বাহু বিশিষ্ট সুসম বহুভুজের শীর্ষগুলো ব্যবহার করে কতগুলো সুসম বহুভুজ আঁকা সম্ভব? (2010 বাহু বিশিষ্ট সুসম বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর ক্রম মুখ্য নয়।)

How many regular polygons can be constructed from the vertices of a regular polygon with 2010 sides? (Assume that the vertices of the 2010 -gon are indistinguishable)



WvP-evsj v e'vsK - c0_g Avtj v MwYZ Drme 2010

জাতীয় গণিত উৎসব

AvtqvRK: evsj vt`k MwYZ Awj wúqW KwguU



৬. a এবং b দুটি পূর্ণ সংখ্যা যেন $1 \leq a, b \leq 2010$ এবং $a \neq b$; এমন কতগুলো ক্রমজোড় (a, b) আছে যেখানে $a^2 + b^2$, 5 দ্বারা বিভাজ্য? $a + b$ এর মান কোন মানের জন্য $a^2 + b^2$ সবচেয়ে বড় হবে?

a and b are two positive integers both less than 2010; $a \neq b$. Find the number of ordered pairs (a, b) such that $a^2 + b^2$ is divisible by 5. Find $a + b$ so that $a^2 + b^2$ is maximum.

৭. $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $AC > AB$ । এর BC বাহুর লম্বসমদ্বিখণ্ডক এবং CAB কোণ এর অন্তর্সমদ্বিখণ্ডক P বিন্দুতে ছেদ করে। P থেকে AB এবং AC বাহুর উপরে অঙ্কিত লম্বদ্বয় বাহুদুটিকে যথাক্রমে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY এবং BC এর ছেদবিন্দু Z ,

$\frac{BZ}{ZC}$ এর মান নির্ণয় কর।

Let $\triangle ABC$ be a triangle with $AC > AB$: Let P be the intersection point of the perpendicular bisector of BC and the internal angle bisector of angle CAB : Let X and Y be the feet of the perpendiculars from P to lines AB and AC ; respectively. Let Z be the intersection point of lines XY and BC : Determine the value of $\frac{BZ}{ZC}$

৮. এমন সকল মৌলিক সংখ্যা p এবং পূর্ণ সংখ্যা a, b (ঋণাত্মকও হতে পারে) নির্ণয় কর যেন $p^a + p^b$ একটি মূলদ সংখ্যার বর্গ হয়।

Find all prime numbers p and integers a and b (not necessarily positive) such that $p^a + p^b$ is the square of a rational number.

৯. $(x + y)^{2010}$ এর বিস্তৃতিতে বিজোড় সহগের সংখ্যা নির্ণয় কর।

Find the number of odd coefficients in expansion of $(x + y)^{2010}$.

১০. $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$ ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার এমন একটি ধারা যার কোন দুটি পদই সমান নয় এবং $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ এবং $a_k > a_{k+1} > \dots > a_n$ । একটি ঘাসফড়িং মূলবিন্দু O থেকে বাস্তব অক্ষ বরাবর ডানদিক বরাবর যথাক্রমে a_1, a_2, \dots, a_n দূরত্বগুলো অতিক্রম করে লাফিয়ে লাফিয়ে চলে। প্রমাণ কর যে, সবার ডানে পৌঁছে গিয়ে সে a_1, a_2, \dots, a_n ধারার পদগুলোকে কোন এক ক্রমে অনুসরণ করে বামদিক বরাবর লাফিয়ে লাফিয়ে সেখান থেকে মূলবিন্দুতে ফিরে আসতে পারে যেন যাবার পথে সে যে বিন্দুগুলোতে নেমেছিল আসার সময় সেগুলোর কোনটিতেই না নেমে থাকে (মূলবিন্দু এবং সর্বডানের বিন্দু হল ব্যতিক্রম)।

$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$ is a sequence of distinct positive real numbers such that $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ and $a_k > a_{k+1} > \dots > a_n$. A Grasshopper is to jump along the real axis, starting at the point O and making n jumps to the right of lengths a_1, a_2, \dots, a_n respectively. Prove that, once he reaches the rightmost point, he can come back to point O by making n jumps to the left of lengths a_1, a_2, \dots, a_n in some order such that he never lands on a point which he already visited while jumping to the right. (The only exceptions are point O and the rightmost point)