

ক্যাটাগরি: হায়ার সেকেন্ডারি (একাদশ- দ্বাদশ- এইচএসসি)
Category: Higher Secondary (xi – xii)

সময়: ৪ ঘণ্টা
Time: 4 Hours

মূল উত্তরপত্রে সমাধান লিখতে হবে। প্রশ্নপত্রের উভয় পাশেই ছাপা রয়েছে। প্রশ্নের নম্বর ব্যতীত সকল সংখ্যা ইংরেজিতে লেখা। প্রতিটি প্রশ্নের মান সমান। প্রশ্নগুলো কাঠিন্যের ক্রমবর্ধমান ক্রমে সাজানো আছে। সমস্যার সমাধানে আংশিক নম্বর প্রদান প্রযোজ্য।

১. প্রমাণ কর যে যেকোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা n এর জন্য $1, 2, 3, \dots, 4n$ সংখ্যাগুলোকে সমান উপাদান সংখ্যা বিশিষ্ট এমন দুটি সেটে বিভক্ত করা যায় যেন সেটদুটির প্রত্যেকের উপাদানগুলোর যোগফল একই হয় এবং সেটদুটির কোন সাধারণ উপাদান না থাকে।
Prove that for any nonnegative integer n the numbers $1, 2, 3, \dots, 4n$ can be divided in two mutually exclusive classes with equal number of members so that the sum of numbers of each class is equal.

২. একটি দাবা টুর্নামেন্টের প্রথম রাউন্ডে প্রত্যেক প্রতিযোগী অবশিষ্ট প্রত্যেক প্রতিযোগীর সাথে একবার করে খেলে। একটি ম্যাচে জয় লাভ করা, ড্র করা অথবা হারার জন্য প্রত্যেক খেলোয়াড় যথাক্রমে $3, 1$ অথবা -1 পয়েন্ট করে পায়। প্রথম রাউন্ড শেষে দেখা গেল সকল প্রতিযোগীর পয়েন্টের সমষ্টি 90 । টুর্নামেন্টে কতজন প্রতিযোগী অংশগ্রহণ করেছিল?

In the first round of a chess tournament, each player plays against every other player exactly once. A player gets $3, 1$ or -1 points respectively for winning, drawing or losing a match. After the end of the first round, it is found that the sum of the scores of all the players is 90 . How many players were there in the tournament?

৩. ABCD আয়তক্ষেত্রে BC বাহুর মধ্যবিন্দু E। BE এর উপর একটি বিন্দু X বেছে নেয়া হল। DX বর্ধিত AB কে P বিন্দুতে ছেদ করে। X এর যে অবস্থানের জন্য ΔBPX ও ΔDXC এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সর্বোচ্চ হয় তা প্রমাণসহ নির্ণয় কর।
E is the midpoint of side BC of rectangle ABCD. A point X is chosen on BE. DX meets extended AB at P. Find the position of X so that the sum of the areas of ΔBPX and ΔDXC is maximum with proof.

৪. $A = 2011!$ এবং $B = 1006^{2011}$ হলে এদের মাঝে কোনটি বড় তা যথাযথ প্রমাণসহ নির্ণয় কর।
Let, $A = 2011!$ and $B = 1006^{2011}$; which one is larger? Show the logic.

৫. একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ ABC এ $\angle A = 90^\circ$ । A বিন্দুতে ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের স্পর্শক BC কে M বিন্দুতে ছেদ করে। ত্রিভুজটির অন্তঃবৃত্ত AC কে S ও AB কে R বিন্দুতে স্পর্শ করে। RS ও BC পরস্পরকে N বিন্দুতে ছেদ করে এবং AM ও SR পরস্পরকে U বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে UMN একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

In a scalene triangle ABC with $\angle A = 90^\circ$. The tangent line at A to its circumcircle meets line BC at M and the incircle touches AC at S and AB at R. The lines RS and BC intersect at N while the lines AM and SR intersect at U. Prove that the triangle UMN is isosceles.

৬. p একটি মৌলিক সংখ্যা। 1 থেকে p পর্যন্ত পূর্ণ সংখ্যাগুলোর যোগফল p এবং তার থেকে ছোট সব মৌলিক সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য। প্রমাণসহ p এর সম্ভাব্য মানগুলো বের করো।
 p is a prime and sum of the numbers from 1 to p is divisible by all primes less or equal to p . Find the value of p with proof.

৭. একটি গ্রুপে $n > 1$ সংখ্যক মানুষ আছেন। এই গ্রুপের যেকোন দুজন মানুষ পরস্পরের বন্ধু অথবা শত্রু। আবার যেকোন বন্ধুর বন্ধুও বন্ধু আর যেকোন শত্রুর শত্রুও বন্ধু। যদি ঐ গ্রুপে থাকা A এবং B পরস্পরের বন্ধু কিংবা শত্রু হয় তাহলে সেটিকে 1টি বন্ধুত্ব কিংবা 1টি শত্রুতা বলা হবে। দেখা গেল ঐ গ্রুপে বন্ধুত্বের সংখ্যা শত্রুতার সংখ্যার সমান। n এর সকল সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

Consider a group of $n > 1$ people. Any two people of this group are related by mutual friendship or mutual enmity. Any friend of a friend and any enemy of an enemy is a friend. If **A** and **B** are friends/enemies of each other then we count it as **1 friendship/enmity**. It is observed that the number of friendships and number of enmities are equal in the group. Find all possible values of n .

৮. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A = 90^\circ$ এবং D , BC এর মধ্যবিন্দু। AB এর উপর F একটি বিন্দু। CA ও DF পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করে এবং $GB \parallel AD$; CF ও AD পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে এবং $AF = FO$; GO , BC -কে R বিন্দুতে ছেদ করে। ΔGDR এর ক্ষেত্রফল $\frac{2}{\sqrt{15}}$ হলে ΔABC এর প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ABC is a right angled triangle with $\angle A = 90^\circ$ and D be the midpoint of BC . A point F is chosen on AB . CA and DF meet at G and $GB \parallel AD$. CF and AD meet at O and $AF = FO$. GO meets BC at R . Find the sides of ΔABC if the area of ΔGDR is $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

৯. একই সংখ্যাকে পাশাপাশি দুবার লিখলে তাকে ঐ সংখ্যার পুনরাবৃত্তি বলা হয়। যেমন 123 এর পুনরাবৃত্তি হল 123123 । এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা নির্ণয় কর (যদি থাকে) যেন তার পুনরাবৃত্তি একটি পূর্ণবর্গ হয়।
The repeat of a natural number is obtained by writing it twice in a row (for example, the repeat of 123 is 123123). Find a positive integer (if any) whose repeat is a perfect square.

১০. একটি বর্গাকার ছকের n সংখ্যক সারি আর n সংখ্যক কলাম আছে, যেখানে n একটি বিজোড় সংখ্যা (অনেকটা দাবাবোর্ডের মত)। এর n^2 সংখ্যক ছোট ছোট বর্গের মাঝে p সংখ্যক বর্গকে কালো রঙ করা হল, বাকিগুলো সাদা থাকল। কালো বর্গগুলো এমনভাবে অবস্থিত যেন পাশাপাশি, ওপর নিচে আর কোনাকুনি দুটি কালো বর্গের মাঝে কমপক্ষে একটি সাদা বর্গ থাকে। এই শর্ত মেনে সর্বাধিক সংখ্যক বর্গকে কালো করা হল। দেখাও যে পূর্ণ সংখ্যার এমন অসীম সংখ্যক ত্রয়ী (p, q, n) আছে যেন সাদা বর্গের সংখ্যা q^2 হয়।

Consider a square grid with n rows and n columns, where n is odd (similar to a chessboard). Among the n^2 squares of the grid, p are black and the others are white. The number of black squares is maximized while their arrangement is such that horizontally, vertically or diagonally neighboring black squares are separated by at least one white square between them. Show that there are infinitely many triplets of integers (p, q, n) so that the number of white squares is q^2 .