ডাচ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব
২০১৬
জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরিঃ সেকেন্ডারি **সময়ঃ ৪ ঘণ্টা**

1. (a) (5 POINTS:) Show that $n(n+1)(n+2)$ is divisible by 6.
   (৫ পয়েন্ট) দেখাও যে $n(n+1)(n+2)$ সর্বদা ৬ দ্বারা বিভাজ্য।

   (b) (10 POINTS:) Show that $1^{2015}+2^{2015}+3^{2015}+4^{2015}+5^{2015}+6^{2015}$ is divisible by 7.
   (১০ পয়েন্ট) দেখাও যে $1^{2015}+2^{2015}+3^{2015}+4^{2015}+5^{2015}+6^{2015}$, 7 দ্বারা বিভাজ্য।

2. (a) (5 POINTS:) How many positive integer factors does 6000 have?
   (৫ পয়েন্ট) ৬০০০ এর কয়টি ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক বিভাজক আছে?

   (b) (10 POINTS:) How many positive integer factors of 6000 are not perfect squares?
   (১০ পয়েন্ট) ৬০০০ এর কয়টি ধনাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক বিভাজক পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়?

3. (20 POINTS:) $\triangle ABC$ is isosceles $AB = AC$. P is a point inside $\triangle ABC$ such that $\angle BCP = 30°$ and $\angle APB = 150°$ and $\angle CAP = 39°$. Find $\angle BAP$.

   (২০ পয়েন্ট) ত্রিভুজ $\triangle ABC$ সমদ্বিবাহু এবং $AB = AC$. P, $\triangle ABC$ এর ভেতর এমন একটি বিন্দু যেন $\angle BCP = 30°$, $\angle APB = 150°$ এবং $\angle CAP = 39°$। $\angle BAP$ এর মান কত?

4. (30 POINTS:) Consider the set of integers $\{1, 2, ..., 100\}$ Let $\{x_1, x_2, ..., x_{100}\}$ be some arbitrary arrangement of the integers $\{1, 2, ..., 100\}$, where all of the x_i are different. Find the smallest possible value of the sum

$$S = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{100} - x_{99}| + |x_1 - x_{100}|.$$

   (৩০ পয়েন্ট) পূর্ণসংখ্যার সেট $\{1, 2, ..., 100\}$ এর কথা চিন্তা কর; মনে কর $\{x_1, x_2, ..., x_{100}\}$ সেটটি ঐ $\{1, 2, ..., 100\}$ সেট এর যেকোন একটি পুনঃবিন্যাস, যেখানে সকল x_i এর মান আলাদা। নিচের রাশির সর্বনিম্ন মান কত হতে পারে?

$$S = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{100} - x_{99}| + |x_1 - x_{100}|.$$

5. Suppose there are m Martians and n Earthlings at an intergalactic peace conference. To ensure the Martians stay peaceful at the conference, we must make sure that no two Martians sit together, such that between any two Martians there is always at least one Earthling.

   (a) (10 POINTS:) Suppose all $m + n$ Martians and Earthlings are seated in a line. How many ways can the Earthlings and Martians be seated in a line?

১২ ফেব্রুয়ারি ২০১৬, সেন্ট যোসেফ হায়ার সেকেন্ডারি স্কুল।

(b) (20 POINTS:) Suppose now that the $m+n$ Martians and Earthlings are seated around a circular round-table. How many ways can the Earthlings and Martians be seated around the round-table?

মনে কর এক মহাজাগতিক শান্তিচুক্তি সম্মেলনে জন মঙ্গল গ্রহের বাসিন্দা আর জন পৃথিবীর বাসিন্দা উপস্থিত আছে। মঙ্গল গ্রহের বাসিন্দারা সম্মেলনের সময় যেন কোন সমস্যা সৃষ্টি করতে না পারে, সেজন্য তোমাকে নিশ্চিত করতে হবে যেন কোন দুজন মঙ্গল গ্রহের বাসিন্দা পাশাপাশি না বসে, অর্থাৎ যেকোন দুইজন মঙ্গল গ্রহের নাগরিকের মাঝে সবসময় অবশ্যই পৃথিবীর একজন নাগরিক থাকে।

(a) (১০ পয়েন্ট:) মনে কর সব পৃথিবী আর মঙ্গল গ্রহের $m+n$ জন বাসিন্দারা একই সারিতে বসেছে। তাহলে তারা নিজেদের মধ্যে কত রকম ভিন্ন বিন্যাসে বসতে পারে?

(b) (২০ পয়েন্ট:) এবার মনে কর পৃথিবী আর মঙ্গল গ্রহের $m+n$ জন বাসিন্দারা এক গোলটেবিলে বসেছে। তাহলে তারা নিজেদের মধ্যে কত রকম ভিন্ন বিন্যাসে বসতে পারে?

6. $\triangle ABC$ is an isosceles triangle with $AC = BC$ and $\angle ACB < 60°$. I and O are the incenter and circumcenter of $\triangle ABC$. The circumcircle of $\triangle BIO$ intersects BC at $D \neq B$.

   (a) (10 POINTS:) Do the lines AC and DI intersect? Give a proof.

   (b) (10 POINTS:) What is the angle of intersection between the lines OD and IB

$\triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার $AC = BC$ এবং $\angle ACB < 60°$. I এবং O যথাক্রমে $\triangle ABC$ এর অন্তকেন্দ্র এবং পরিকেন্দ্র। $\triangle BIO$ এর পরিবৃত্ত BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে, যেখানে $D \neq B$।

(a) (১০ পয়েন্ট:) রেখা AC এবং DI কি কখনো ছেদ করে? প্রমাণসহ জবাব দাও।

(b) (১০ পয়েন্ট:) রেখা OD ও IB এর মধ্যকার কোণ কত?

7. Aasma is a mathematician and devised an algorithm to find a husband. The strategy is:

   - Start interviewing a maximum of 1000 prospective husbands. Assign a ranking r to each person that is a positive integer. No two prospects will have same the rank r.
   - Reject the first k men and let H be highest rank of these k men.
   - After rejecting the first k men, select the next prospect with a rank greater than H and then stop the search immediately. If no candidate is selected after 999 interviews, the 1000th person is selected.

১২ ফেব্রুয়ারি ২০১৬, সেন্ট যোসেফ হায়ার সেকেন্ডারি স্কুল।

Assma wants to find the value of k for which she has the highest probability of choosing the highest ranking prospect among all 1000 candidates without having to interview all 1000 prospects.

(a) (6 POINTS:) What is the probability that the highest ranking prospect among all 1000 prospects is the $(m+1)$th prospect?

(b) (6 POINTS:) Assume the highest ranking prospect is the $(m+1)$th person to be interviewed. What is the probability that the highest rank candidate among the first m candidates is one of the first k candidates who were rejected?

(c) (6 POINTS:) What is the probability that the prospect with the highest rank is the $(m+1)$th person *and* that Aasma will choose the $(m+1)$th boy using this algorithm?

(d) (16 POINTS:) The total probability that Aasma will choose the highest ranking prospect among the 1000 prospects is the sum of the probability for each possible value of $m+1$ with $m+1$ ranging between $k+1$ and 1000. Find the sum. To simplify your answer use the formula

$$\ln N \approx \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

(e) (6 POINTS:) Find that value of k that maximizes the probability of choosing the highest ranking prospect without interviewing all 1000 candidates. You may need to know that the maximum of the function $x \ln \frac{A}{x-1}$ is approximately $(A+1)/e$, where A is a constant and e is Euler's number, $e = 2.718\ldots$.

আসমা একজন গণিতবিদ, তাই সে জীবনসঙ্গী খুঁজে নিতে এক গাণিতিক প্রক্রিয়া বের করেছে। প্রক্রিয়াটি এরকম:

- সর্বোচ্চ ১০০০ জন আগ্রহী পাণিপ্রার্থীর সাক্ষাৎকার নাও। সবাইকে একটি র‍্যাঙ্কিং r দাও, যেটি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। কোন দুজন প্রার্থীর র‍্যাঙ্ক r সমান হবে না।
- প্রথম k জনকে বিদায় করে দাও। এই বিদায় করে দেয়া k জনের মধ্যে মধ্যে সর্বোচ্চ র‍্যাঙ্কিং হল H।
- প্রথম k জনকে বিদায় করার পর, প্রথম যে প্রার্থীর র‍্যাঙ্কিং H থেকে বেশি তাকে বেছে নাও, এবং সাথে সাথেই জীবনসঙ্গী খোঁজা বন্ধ করে দাও। যদি 999 টা সাক্ষাৎকারের পরেও কাউকে বেছে নেয়া না হয়, তবে কোন শর্ত ছাড়াই 1000 তম জনকে বেছে নাও।

ডাচ-বাংলা ব্যাংক - প্রথম আলো গণিত উৎসব
২০১৬
জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

ক্যাটাগরিঃ সেকেন্ডারি **সময়ঃ ৪ ঘণ্টা**

আসমা k এর এমন একটি মান খুঁজে পেতে চায় যার জন্যে তার সব প্রার্থীর সাক্ষাৎকার না নিয়েই সর্বোচ্চ র‍্যাঙ্কিং সহ জীবনসঙ্গী খুঁজে পাওয়ার সম্ভাব্যতা সর্বোচ্চ হয়।

(a) (৬ পয়েন্ট:) 1000 প্রার্থীর মধ্যে সর্বোচ্চ র‍্যাঙ্কিং সহ জীবনসঙ্গী $(m+1)$তম জন হবার সম্ভাব্যতা কত??

(b) (৬ পয়েন্ট:) ধর $(m+1)$তম সাক্ষাৎকার নেয়া প্রার্থীর র‍্যাঙ্কিংই সর্বোচ্চ। প্রথমেই বিদায় হওয়া k জনের মধ্যেই কোন একজনের র‍্যাঙ্কিং প্রথম m জনের মধ্যে সর্বোচ্চ হওয়ার সম্ভাব্যতা কত?

(c) (৬ পয়েন্ট:) সর্বোচ্চ র‍্যাঙ্কবিশিষ্ট প্রার্থীর $(m+1)$ তম হওয়ার এবং এই প্রক্রিয়া ব্যবহার করে আসমার সেই $(m+1)$তম প্রার্থীকেই বেছে নেয়ার সম্ভাব্যতা কত?

(d) (১৬ পয়েন্ট:) সর্বমোট সম্ভাব্যতা যে আসমা 1000 জন প্রার্থীর মধ্যে সর্বোচ্চ র‍্যাঙ্কবিশিষ্ট প্রার্থীকেই বেছে নেবে, হল $k+1$ থেকে 1000 এর মধ্যে $m+1$ এর সকল মানের জন্যে আসমার সর্বোচ্চ র‍্যাঙ্কবিশিষ্ট প্রার্থীকে বেছে নেয়ার সম্ভাব্যতার যোগফল। যোগফলটি নির্ণয় কর; তাকে সরল করার জন্যে নিচের সূত্র ব্যবহার করতে পার।

$$\ln N \approx \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$$

(e) (৬ পয়েন্ট:) k এর এমন মান খুঁজে বের কর যা 1000 জনের সাক্ষাৎকার না নিয়েই সর্বোচ্চ র‍্যাঙ্কবিশিষ্ট প্রার্থী খুঁজে নেবার সম্ভাব্যতা সর্বোচ্চ করে। তুমি এটি ব্যবহার করতে পার যে $x \ln \frac{A}{x-1}$ এই ফাংশনের সর্বোচ্চ মান $(A+1)/e$, যেখানে A একটি ধ্রুবক এবং e অয়লারের ধ্রুবক, $e = 2.718\ldots$.

8. (30 POINTS:) $\triangle ABC$ is inscribed in circle ω with $AB = 5, BC = 7, AC = 3$. The bisector of $\angle A$ meets side BC at D and circle ω at a second point E. Let γ be the circle with diameter DE. Circles ω and γ meet at E and at a second point F. Then $AF^2 = \frac{m}{n}$ where m and n are relatively prime positive integers. Find $m+n$.

(৩০ পয়েন্ট:) $\triangle ABC, \omega$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত, যেখানে $AB = 5, BC = 7, AC = 3$. $\angle A$ কোণের সমদ্বিখন্ডক BC বাহুকে D বিন্দু এবং ω কে দ্বিতীয় একটি বিন্দুতে ছেদ করে। γ হল DE ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্ত। বৃত্ত ω এবং γ E এবং দ্বিতীয় আরেক বিন্দু F এ ছেদ করে। তাহলে $AF^2 = \frac{m}{n}$ যেখানে m আর n সহমৌলিক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $m+n$ এর মান বের কর।

১২ ফেব্রুয়ারি ২০১৬, সেন্ট যোসেফ হায়ার সেকেন্ডারি স্কুল।